

## E. Berechnung permanent magnetischer Felder

Die folgenden Abschnitte sollen einen Eindruck vermitteln, wie Permanentmagnete bzgl. ihrer magnetischen Felder berechnet werden können. Dieser Überblick kann selbstverständlich nicht alle Gebiete der mathematischen Analyse umfassen. Wir werden lediglich die grundlegenden Differentialgleichungen der Magnetostatik herleiten, einen kurzen Überblick über die numerische Methode der Finiten Elemente geben und dann zur analytischen Berechnung von Dauermagneten kommen. Einige der unten angegebenen Gleichungen basieren mathematisch auf dem Gebiet der Vektoranalysis. Die entsprechende Bedeutung einer Reihe von Symbolen wird daher in einem kurzen Anhang erläutert.

### 1. Generelles

Das Herz aller Methoden zur Analyse makroskopischer magnetischer Systeme sind die berühmten Maxwell-Gleichungen zusammen mit einigen Materialgesetzen. Aus den Maxwell-Gleichungen lassen sich partielle Differentialgleichungen für elektromagnetische Potentiale ableiten, die alle Gebiete elektromagnetischer Phänomene abdecken, wie statische und zeitabhängige elektrische und magnetische Felder, Stromverteilungen, elektrische Netzwerke oder elektromagnetische Wellen. Wir werden im Folgenden zuerst eine Gleichung zur Behandlung von permanenten Magneten und zeitunabhängigen elektrischen Strömen herleiten.

In Gleichung (B.4) hatten wir:

$$\vec{B} = \vec{B}_r + \mu_0 \cdot \mu_r (\mathbf{H}) \cdot \vec{H} \quad (\text{E.1})$$

Diese Konstitutionsrelation umfaßt Dauermagnete mit Remanenzinduktion  $\mathbf{B}_r$  und der i.a. Feld abhängigen jedoch kleinen Permeabilität  $\mu_r$ . Sie kann jedoch ebenso für weichmagnetische Materialien verwendet werden, in denen  $\mathbf{B}_r$  vergleichsweise klein und  $\mu_r$  sehr groß ist, oder auch für beliebige andere Materialien.

Wir verwenden nun das Vektorpotential  $\mathbf{A}$  und zusätzlich  $\mathbf{M}_r$  statt  $\mathbf{B}_r$ , d.h.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{und} \quad \vec{M}_r = \vec{B}_r / \mu_0 \quad (\text{E.2})$$

Die Darstellung von  $\mathbf{B}$  mit Hilfe eines Vektorpotentials folgt aus der Quellenfreiheit  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , vergleiche hierzu (EA.8) im Anhang. Dies liefert zusammen mit (E.1), wenn wir auf beiden Seiten die Rotation bilden:

$$\vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu_r} \vec{\nabla} \times \vec{A} = \mu_0 \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H} + \vec{\nabla} \times \frac{\vec{M}_r}{\mu_r}) \quad (\text{E.3})$$

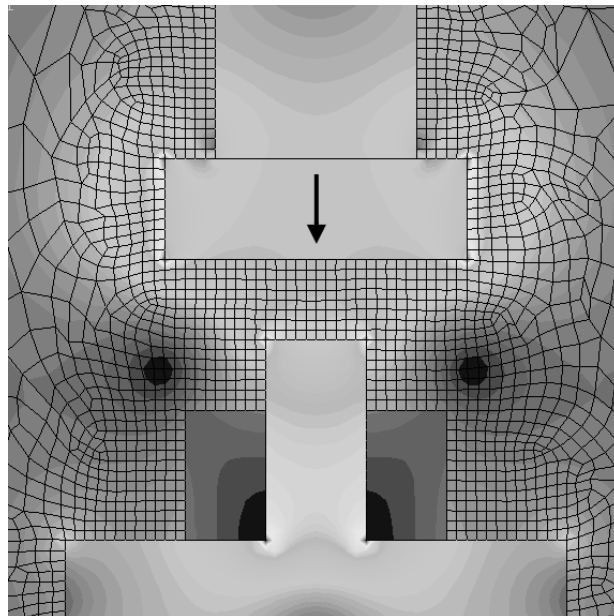
Wenn wir uns an das Ampersche Durchflutungsgesetz Gl. (A.4) erinnern, so sehen wir, daß im statischen Fall der erste Term auf der rechten Seite nichts anderes ist als die Stromdichte  $\mathbf{j}$ . Als zu lösende Differentialgleichung der Problemstellung erhalten wir damit:

$$\vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu_r} \vec{\nabla} \times \vec{A} = \mu_0 \cdot (\vec{j} + \vec{\nabla} \times \frac{\vec{M}_r}{\mu_r}) \quad (\text{E.4})$$

Vorgegebene Größen bei einem solchen magnetostatischen Problem sind hier die Stromdichte sowie die Remanenzmagnetisierung und die Unbekannte ist das Vektorpotential. Weiterhin vorzugeben ist die Permeabilität. Zusätzlich ist bei der Bestimmung von  $\mathbf{A}$  nach (E.4) das Verhalten des Potentials auf den Rändern des Definitionsbereichs sowie unter zusätzlichen Eichbedingungen zu spezifizieren. Explizite Lösungen von (E.4) für  $\mathbf{A}$  und damit auch für  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{H}$  sind nur in speziellen Fällen ermittelbar, was bedeutet, daß numerische Verfahren zum Einsatz kommen müssen. Das populärste Verfahren ist dabei die Finite Elemente Methode (FEM).

Die Finite Elemente Methode unterteilt den Raum in kleine Elemente und nimmt eine lineare oder quadratische Ortsabhängigkeit der Unbekannten innerhalb eines jeden Elementes an. Abb. E1 zeigt eine solche Verteilung von Elementen für ein zweidimensionales Beispiel. Das Verhalten der Unbekannten innerhalb eines Elementes wird mittels ihrer Werte an den Ecken, den sogenannten Knoten, oder mittels der Werte auf den Rändern spezifiziert. Unter diesen Voraussetzungen kann eine Gleichung wie (E.4) in ein lineares Gleichungssystem mit den Knoten- oder Randwerten als Unbekannte umgewandelt werden. Die FEM-Methode liefert somit eine Approximation der Wirklichkeit mit zunehmender Qualität bei zunehmender Dichte der Elemente. Nachteilig ist bei dieser Methode, daß entsprechende Softwarepakete zumindest für dreidimensionale Berechnungen sehr teuer sind. Üblich sind dabei Preise im Bereich mehrerer 10.000 US\$. Zusätzlich erfordern derartige Programmpakete ein hohes Wissensniveau und die Analysen sind in der Regel recht zeitintensiv.

Neben den erwähnten direkten Lösungen der Differentialgleichungen für wenige Ausnahmefälle und der FEM Methode existieren eine Reihe weiterer numerischer Methoden wie FDM (Finite Differenzen Methode), BEM (Boundary Element Methode) und FIT (Finite Integrationstechnik). Sie ermitteln ebenso wie FEM die Unbekannten auf diskreten Stellen im Raum, die mathematische und praktische Umsetzung ist jedoch eine andere. Teilweise sind diese Methoden weniger populär als FEM, teilweise weisen sie aber auch Nachteile auf.



**Abb. E1:** Wechselwirkung einer Spule mit einem unidirektionalen Magneten, beide umgeben von weichmagnetischem Stahl und Luft, analysiert mit der FEM Methode.

Als eine Näherungsmethode sei auch die sog. magnetischen Kreismethode erwähnt, die in nahezu jedem Lehrbuch über technischen Magnetismus erwähnt wird. Vor Aufkommen der

FEM-Methode sowie kostengünstiger EDV Ressourcen wurde diese extensiv genutzt. Sie ist geeignet für die mehr oder weniger genaue Analysen von System mit Dauermagneten oder Strömen, wenn diese in Systeme aus weichmagnetischen Materialien integriert sind und nur kleine Luftspalte im System vorhanden sind. Sie basiert auf direkte Anwendung des Ampereschen Durchflutungsgesetzes, der Flußerhaltung und magnetischer Konstitutionsrelationen und liefert explizite Formeln zur Approximation der Felder, insbesondere in den Luftspalten. Weiteres zur magnetischen Kreismethode sollte der Literatur entnommen werden.

Nach dieser eher allgemeinen Einführung kommen wir nun zur mathematischen Behandlung der Dauermagnete selbst. Im Folgenden werden wir uns mit der analytischen Berechnung ihrer Felder im Dreidimensionalen befassen.

## 2. Berechnung von Dauermagneten

In Abwesenheit elektrischer Ströme und weichmagnetischer Materialien ist zum einen in (E.4)  $\mathbf{j}=0$ . Zum anderen kann  $\mu_r$  für die meisten Permanentmagnete mit Eins gleichgesetzt werden, so daß sich (E.4) reduziert zu:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M}_r$$

Als Eichbedingung für  $\mathbf{A}$  führen wir nun die sogenannte Coulomb-Eichung ein:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (\text{E.5})$$

Zusammen mit der Vektor-Identität (EA.9) wird das obige damit:

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \cdot \vec{\nabla} \times \vec{M}_r \quad (\text{E.6})$$

Dies ist unsere zu lösende partielle Differentialgleichung. Sie hat als generelle Lösung folgendes Vektorpotential:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}_r}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_F \frac{\vec{M}_r \times \vec{n}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dF' \quad (\text{E.7})$$

Hier ist  $\mathbf{r}$  der Ortsvektor an dem das Feld gesucht wird.  $\mathbf{r}'$  ist der Ortsvektor für die Punkte des Magneten. Die Integration erstreckt sich über das Magnetvolumen und dessen Oberfläche.

Gl. (7) ist weniger beliebt als die im Folgenden vorgestellte Formulierung, teilweise vielleicht, weil  $\mathbf{A}$  ein Vektor mit drei Komponenten ist:

Verwenden wir (E.1) zusammen mit  $\mu_r=1$  in den Magneten und in Luft, so erhalten wir mit  $\mathbf{M}_r$  nach (E.2):

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{M}_r + \mu_0 \cdot \vec{H}$$

Berücksichtigen wir, daß  $\mathbf{B}$  keine Quellen hat, d.h.  $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B}=0$ , siehe Gl. (A.3), so führt dies bei Bildung der Divergenz auf beidem Seiten zu:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}_r \quad (\text{E.8})$$

Da  $\mathbf{j}=0$  d.h.  $\vec{\nabla} \times \mathbf{H}=0$ , so folgt aus der Vektoranalysis, daß man  $\mathbf{H}$  mit Hilfe eines Skalarpotentials ausdrücken kann, siehe hierzu Gl. (EA.7) im Anhang:

$$\vec{H} = -\vec{\nabla} \Phi \quad (\text{E.9})$$

Dies führt zusammen mit (E.8) zu:

$$\Delta\Phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{M}_r \quad (\text{E.10})$$

Dies ist nun unsere zu lösende Differentialgleichung. Die generelle Lösung lautet:

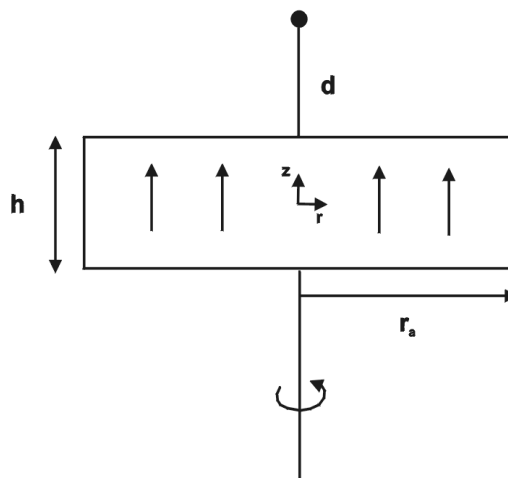
$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{M}_r}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_F \frac{\vec{M}_r \cdot \vec{n}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dF' \quad (\text{E.11})$$

Die Integration wird wie oben über das Magnetvolumen sowie über die Magnetoberfläche ausgeführt.

Welche von beiden Formulierungen, also das magnetische Vektorpotential oder das magnetische Skalarpotential, zur praktischen Berechnung eingesetzt wird, hängt oft auch vom Schwierigkeitsgrad der jeweiligen Integral-Berechnung ab und kann unterschiedlich für unterschiedliche Geometrien sein. Im Allgemeinen können die Integrale nicht mittels expliziter Ausdrücke dargestellt werden und sind daher numerisch zu ermitteln.

### 3. Berechnungs-Beispiel

Im Folgenden zeigen wir ein einfaches Beispiel für die Anwendung des Skalar-Potentials bei der Berechnung eines homogen magnetisierten Zylinders oder Scheibenmagnets der Höhe  $h$  und mit Außenradius  $r_a$ . Das Feld soll bei einem Abstand  $d$  von der Stirnfläche berechnet werden, wobei die Magnetisierung in axialer Richtung weist  $\vec{M} = M_r \cdot \vec{e}_z$ , siehe Skizze.



**Fig.E2:** Skizze eines homogen magnetisierten Zylinders. Das Feld ist am eingezeichneten Punkt oberhalb des Magneten im Abstand  $d$  zu berechnen.

Wenn wir die Lösung für das Potential (E.11) betrachten, so erkennen wir, daß im Volumenintegral stets  $\vec{\nabla} \cdot \vec{M}_r = 0$ . Insofern verschwindet dieses Integral selbst. Dies ist stets der Fall wenn homogene Magnetisierungen vorliegen. Das Magnetfeld resultiert dann alleinig aus den Polflächen.

Zur Vereinfachung kombinieren wir den Rest von (E.11) mit Gl. (E.9) und ziehen den ungestrichelten Nabla Operator unter das Flächenintegral. Damit erhält man für das Feld:

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_F \vec{M}_r \cdot \vec{n}' \vec{\nabla} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dF' \quad (\text{E.12})$$

Das Skalarprodukt der Magnetisierung mit dem Oberflächenvektor ist nur ungleich Null auf den Stirnflächen des Zylinders. Im Folgenden gehört das Pluszeichen zur oberen und Minus zur unteren Stirnfläche:

$$\vec{M}_r \cdot \vec{n} = \pm M_r \quad (\text{E.13})$$

Das Oberflächen-Element der Stirnfläche ist:

$$dF' = r' dr' d\varphi' \quad (\text{E.14})$$

Aus der Problemsymmetrie folgt, daß am betrachteten Zentralpunkt im Abstand  $d$  zur Oberfläche nur eine axiale, d.h.  $z$ -Komponente des Feldes auftreten kann. Insofern benötigen wir nur die  $z$ -Komponente des Gradienten unter dem Integral:

$$\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{r'^2 + (z - z')^2}}$$

$z' = \pm h/2$  ist die axiale Position der Stirnflächen und  $z$  ist die Koordinate des Aufpunktes, gesehen vom Koordinatenursprung. Nach Differenzieren und Ausdrücken von  $z$  und  $z'$  durch  $d$  und  $h$  erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{d}{\sqrt{(r'^2 + d^2)^3}} \quad \text{für die obere Fläche} \quad (\text{E.15a})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{d+h}{\sqrt{(r'^2 + (d+h)^2)^3}} \quad \text{für die untere Fläche} \quad (\text{E.15b})$$

Wir fassen nun (E.12)-(E.15) zusammen und erhalten für das Feld:

$$\vec{H}(d) = H_z \cdot \vec{e}_z$$

mit (E.16)

$$H_z = H_{zt} - H_{zb}$$

wobei

$$H_{zt} = \frac{M_r}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{ra} \frac{d \cdot r'}{\sqrt{(r'^2 + d^2)^3}} dr' \quad (\text{E.16a})$$

und

$$H_{zb} = \frac{M_r}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{ra} \frac{(d+h) \cdot r'}{\sqrt{(r'^2 + (d+h)^2)^3}} dr'$$

(E.16b)

Die Winkelintegration ist trivial und die Integrale über den Radius können aus Integraltabellen entnommen werden. Wir erhalten damit als Endresultat für das gesuchte Feld:

$$\vec{H}(d) = H_z \cdot \vec{e}_z \quad (\text{E.17})$$

mit

$$H_z(d) = \frac{M_r}{2} (g(d+h) - g(d)) \quad (\text{E.17a})$$

wobei

$$g(w) = \frac{w}{\sqrt{r_a^2 + w^2}} \quad (\text{E.17b})$$

Zum Beispiel erzeugt ein Magnet mit  $r_a=5\text{mm}$ ,  $h=3\text{mm}$  und  $M_r=800\text{kA/m}$  ( $=1\text{T}$ ) im Abstand  $1\text{mm}$  ein Feld von  $171\text{ kA/m}$ .

Während obiges Beispiel ein relativ leicht ableitbares Resultat aufweist, können im Allgemeinfall die jeweiligen Integrale oftmals nicht explizit ausgedrückt werden und sind numerisch zu lösen. Im Fall nicht homogener Magnetisierungen muß zusätzlich das Volumenintegral in (E.11) berechnet werden.

## Anhang

Oben wurden teilweise Symbole der Vektoranalysis wie der Nabla Operator verwendet. Diese und einiges weitere sollen im folgenden erläutert werden:

Der Nabla Operator kann in kartesischen Koordinaten als Vektor einzelner Differentialoperatoren dargestellt werden:

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (\text{EA.1})$$

In kartesischen Koordinaten kann dieser Operator wie ein Vektor in Form des Skalarproduktes und des Vektorproduktes mit Vektorfeldern angewendet werden. Mit Skalarfeldern kann eine einfache Multiplikation durchgeführt werden. Damit lassen sich die Gebilde Divergenz, Rotation und Gradient erzeugen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \text{div}(\vec{a}) = \frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial y} a_y + \frac{\partial}{\partial z} a_z \quad (\text{EA.2})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \text{rot}(\vec{a}) = \vec{e}_x \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \quad (\text{EA.3})$$

$$\vec{\nabla} \Phi = \text{grad}(\Phi) = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} \Phi + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \Phi + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \Phi \quad (\text{EA.4})$$

Da wir oben  $\text{grad}(\Phi)$  für unser Beispiel in Zylinderkoordinaten  $r, \varphi, z$  verwendet haben, sei dies im folgenden ebenfalls angeschrieben. Ausdrücke für  $\text{div}(\mathbf{a})$  und  $\text{rot}(\mathbf{a})$  in anderen Koordinatensystemen können der Literatur entnommen werden:

$$\vec{\nabla} \Phi = \text{grad}(\Phi) = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \Phi + \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \Phi \quad (\text{EA.5})$$

Ein weiterer Operator, der aus dem Nabla Operator folgt, ist der Laplace Operator:

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z} \quad (\text{EA.6})$$

Einige wichtige Beziehungen von Vektor-Feldern in Zusammenhang mit diesen Operatoren sind die folgenden:

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{\nabla} \Phi \quad (\text{EA.7})$$

(In Worten: Ist ein Vektorfeld rotationsfrei, so kann man es als Gradient eines Skalarpotentials darstellen)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (\text{EA.8})$$

(In Worten: Ist ein Vektorfeld quellenfrei, so kann man es als Rotation eines Vektorpotentials ausdrücken.)

Eine Identität mit Differentialoperatoren, die oben verwendet wurde, ist die folgende:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{a} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \Delta \vec{a} \quad (\text{EA.9})$$

Eine Vielzahl weiterer Beziehungen zwischen Operatoren in Zusammenhang mit Skalar- und Vektorfeldern können in der Literatur gefunden werden. Dies gilt auch zu den Regeln der Berechnung der hier dargestellten Flächen- und Volumenintegrale sowie ihren wechselseitigen Beziehungen wie dem Gaußschen, Stokschem oder Greenschem Satz.